

REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN CIPTAAN

Dalam rangka perlindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta, dengan ini menerangkan:

Nomor dan tanggal permohonan : EC00202184731, 27 Desember 2021

Pencipta

Nama : **Dr. Raden Sulaiman, M.Si.**
Alamat : Kebraon Indah Permai K/19, Surabaya, JAWA TIMUR, 60222
Kewarganegaraan : Indonesia

Pemegang Hak Cipta

Nama : **LPPM-Universitas Negeri Surabaya**
Alamat : Gedung Rektorat Kantor LPPM Lantai 6, Kampus Universitas Negeri Surabaya, Lidah Wetan, Surabaya, JAWA TIMUR, 60213
Kewarganegaraan : Indonesia
Jenis Ciptaan : **Buku Panduan/Petunjuk**
Judul Ciptaan : **Anti Derivatif Dan Teknik Integrasi**
Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali : 8 Desember 2021, di Surabaya
di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia
Jangka waktu perlindungan : Berlaku selama hidup Pencipta dan terus berlangsung selama 70 (tujuh puluh) tahun setelah Pencipta meninggal dunia, terhitung mulai tanggal 1 Januari tahun berikutnya.
Nomor pencatatan : 000310989

adalah benar berdasarkan keterangan yang diberikan oleh Pemohon.

Surat Pencatatan Hak Cipta atau produk Hak terkait ini sesuai dengan Pasal 72 Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.



a.n Menteri Hukum dan Hak Asasi Manusia
Direktur Jenderal Kekayaan Intelektual
u.b.
Direktur Hak Cipta dan Desain Industri

Dr. Syarifuddin, S.T., M.H.
NIP.197112182002121001

Disclaimer:

Dalam hal pemohon memberikan keterangan tidak sesuai dengan surat pernyataan, Menteri berwenang untuk mencabut surat pencatatan permohonan.

2021

LKM

(LEMBAR KEGIATAN MAHASISWA)



ANTI DERIVATIF dan TEKNIK INTEGRASI

Oleh:

▪ R. Sulaiman

Jurusan Matematika

Universitas Negeri Surabaya

KATA PENGANTAR

Lembar Kerja Mahasiswa (LKM) Kalkulus Integral ini terdiri dari tiga LKM. yaitu LKM-1, LKM-2 dan LKM-3. LKM-1 tentang anti derivative, LKM-2 tentang integral tak tentu, sedangkan LKM-3 tentang teknik integrasi.

LKM ini terdiri digunakan dalam pembelajaran matakuliah Kalkulus sebagai kelengkapan dalam pembelajaran. Dengan LKM ini diharapkan pembelajaran dapat berlangsung dengan mengaktifkan mahasiswa. Siswa dilibatkan dalam pembelajaran dengan aktif mengerjakan soal yang ada pada LKM.

Penulis berterimakasih kepada semua pihak yang telah ikut berperan dalam kelancaran penyusunan LKM ini. Semoga LKM ini bermanfaat untuk mahasiswa, dosen dan pihak lain yang terkait.

Desember 2021

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman Cover	1
Kata Pengantar	2
Daftar Isi	3
LKM-1 : Anti Dereviatif	4
Latihan Soal LKM-1	5
LKM-2 : Anti Dereviatif	7
Latihan Soal LKM-2	8
LKM-3 : Teknik Integrasi	12
Latihan Soal LKM-3	13
Daftar Pustaka	17

LKM-1

ANTI DERIVATIF

A. TUJUAN

Capaian
Pembelajaran

- : ■ Mampu menentukan anti derivatif suatu fungsi
- Mampu membuktikan teorema dasar tentang anti derivatif

B. MATERI

Anti Derivatif

Definisi.

Fungsi F disebut **anti derivatif** fungsi f pada suatu selang jika $F'(x) = f(x)$ pada selang itu.

Kita tahu bahwa derivatif dari $\frac{1}{4}x^4 - x^2$ adalah $x^3 - 2x$. Oleh karena itu, kita dapat mengatakan **anti derivatif** dari $x^3 - 2x$ adalah $\frac{1}{4}x^4 - x^2$.

Contoh 1

Fungsi-fungsi $2x^2$, $2x^2 - 3$, $2x^2 + 11$, $2x^2 + \pi$ semuanya merupakan anti derivatif dari $4x$ karena derivatif dari setiap fungsi itu adalah $4x$. Untuk sebarang konstanta c , $2x^2 + c$ merupakan anti derivatif dari $4x$. Ini menunjukkan bahwa anti derivatif suatu fungsi tidak tunggal (lebih dari sebuah).

Secara umum dapat dinyatakan dengan teorema berikut ini.

Teorema. Jika $F(x)$ anti derivatif dari $f(x)$, maka untuk sebarang konstanta c , $F(x) + c$ juga anti derivatif dari $f(x)$.

Contoh 2

Dengan memperhatikan Diagram 1.1 dan Teorema 1.2, kita peroleh:

Anti derivative $\cos x$ adalah $\sin x + c$, karena $\frac{d}{dx}(\sin x + c) = \cos x$.

Anti derivatif $-2x$ adalah $-x^2 + c$, karena $\frac{d}{dx}(-x^2 + c) = -2x$.

Anti derivatif $\frac{-1}{x\sqrt{x}}$ adalah $\frac{1}{\sqrt{x}} + c$, karena $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + c\right) = \frac{-1}{x\sqrt{x}}$.

Soal Latihan LKM-1

Jawablah soal berikut ini!

1. Periksa, manakah berikut ini yang merupakan antiderivatif dari $f(x) = 2\sin x - x$, beri penjelasan!

- a) $g(x) = 2\cos x - 1$
- b) $g(x) = -2\cos x - \frac{1}{2}x^2$
- c) $g(x) = -2\cos x - x$
- d) $g(x) = -2\cos x - \frac{1}{2}x^2 + c$

Jawab:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Periksa, manakah berikut ini yang merupakan antiderivatif dari $f(x) = -\frac{1}{x^2\sqrt{x}} + \cos 2x$, beri penjelasan!

- a) $g(x) = -\frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}} - 2\sin 2x$
- b) $g(x) = \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 3 - 2\sin 2x$

c) $g(x) = \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 2\sin 2x$

d) $g(x) = \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \sin 2x$

Jawab:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Tentukan derivativ dari setiap fungsi berikut ini, dan beri penjelasan!

a) $f(x) = -3\cos 2x - 2x$

b) $g(x) = x^3 + 2\sin \frac{x}{2}$

c) $h(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} - \cos x$

Jawab:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

LKM-2

INTEGRAL TAKTENTU

A. TUJUAN

Capaian
Pembelajaran

- Mampu menentukan anti derivatif suatu fungsi
- Mampu membuktikan teorema dasar tentang anti derivatif

B. MATERI

Integral Taktentu

Jika $F(x)$ adalah fungsi sehingga $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$, maka fungsi dengan bentuk $F(x) + c$ disebut anti derivatif dari $f(x)$ dan ditulis dengan

$$\int f(x)dx = F(x) + c \dots \dots \dots (1)$$

Simbol $\int$ dibaca "*integral*" dan $f(x)$ disebut "*integran*".

Pernyataan (1) dibaca "integral tak tentu dari $f(x)$ sama dengan $F(x)$ ditambah c . Kata "tak tentu" menunjukkan bahwa hasilnya tak tentu (banyak fungsi yang mungkin), c disebut konstanta pengintegralan. Untuk menyederhanakan penulisan, seringkali dx "dimasukkan" pada integran. Sebagai Contoh, $\int 1 \cdot dx$ ditulis dengan $\int dx$ dan $\int \frac{1}{x^2} dx$ ditulis dengan $\int \frac{dx}{x^2}$.

Untuk menentukan hasil integral, perhatikan berikut ini!

No	Anti Derivatif
1	$\int df(x) = f(x) + c$
2	$\int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln f(x) + c$
3	$\int f(x)^n df(x) = \frac{1}{n+1} f(x)^{n+1} + c, n \neq -1$
4	$\int \cos f(x) df(x) = \sin f(x) + c$

5	$\int \sin f(x) df(x) = -\cos f(x) + c$
6	$\int e^{f(x)} df(x) = e^{f(x)} + c$
7	$\int \frac{df(x)}{\cos^2 f(x)} = \tan f(x) + c$
8	$\int \frac{df(x)}{\sin^2 f(x)} dx = -\cot f(x) + c$
9	$\int \frac{df(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} = \arcsin f(x) + c; -1 < x < 1$
10	$\int \frac{df(x)}{-\sqrt{1-[f(x)]^2}} = \arccos f(x) + c; -1 < x < 1$
11	$\int \frac{df(x)}{1+[f(x)]^2} = \arctan f(x) + c$

Jawablah soal berikut ini!

Tentukan hasil integral tak tentu berikut ini!

1. $\int x(x^2 + 5)dx$

Jawab:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$2. \int \left(\frac{1}{3x} + \tan x \right) dx$$

Jawab:

.....

.....

.....

.....

$$3. \int \frac{1}{2x \ln x} dx$$

.....

.....

.....

.....

$$4. \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$5. \int \cos^2 2x dx$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$6. \int e^{-2x} dx$$

Jawab:

.....

.....

.....

.....

.....

$$7. \int 3^x dx$$

Jawab:

.....

.....

.....

.....

.....

$$8. \int 7^{-3x} dx$$

Jawab:

.....

.....

.....

.....

.....

$$9. \int (5x - 12)^{17} dx$$

Jawab:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-2x^2}}$

Jawab:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

LKM-3

TEKNIK INTEGRASI

A. TUJUAN

Capaian
Pembelajaran

- : ■ Mampu menentukan integral suatu fungsi dengan berbagai teknik integrasi
- Membandingkan efisiensi beberapa teknik integrasi

B. MATERI

Teknik Integrasi

Integran Memuat bentuk $\sqrt[p]{(ax + b)^q}$

Untuk menghilangkan akar dapat dilakukan substitusi $z = \sqrt[p]{(ax + b)^q}$.
Dengan substitusi itu kita peroleh:

$$z^p = ax + b; x = \frac{z^p - b}{a}; dx = \frac{p \cdot z^{p-1} dz}{a}.$$

Dengan mensubstitusi x menjadi $\frac{z^p - b}{a}$ dan dx menjadi $\frac{p \cdot z^{p-1} dz}{a}$, maka integran yang semula fungsi dalam x berubah menjadi fungsi dalam z . Kita berharap dengan melakukan substitusi ini pengintegralan menjadi lebih sederhana.

Contoh.

Tentukan $\int \frac{x dx}{(2x-1)^3}$.

Jawab:

Dengan melakukan substitusi $z = \sqrt{2x-1}$ diperoleh $x = \frac{1}{2}(z^2 + 1)$,

$$dx = z dz, \text{ sehingga } \int \frac{x dx}{\sqrt{(2x-1)^3}} = \int \frac{z^2 + 1}{2} \cdot \frac{z dz}{z^3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{z^2 + 1}{z^2} dz \\
&= \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) dz \\
&= \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z}\right) + c \\
&= \frac{1}{2} \left(\sqrt{2x-1} - \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right) + c.
\end{aligned}$$

Soal Latihan LKM-2

Jawablah soal berikut ini!

Tentukan hasil integral tak tentu berikut ini!

1. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-3x}} dx$

Jawab:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. $\int \frac{x+3}{\sqrt{2x+3}} dx$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Integral Memuat bentuk $\sqrt[p]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^q}$

Untuk menghilangkan akar dapat dilakukan substitusi $z = \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Contoh

Hitung $\int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx$

Jawab:

Dengan melakukan substitusi $z = \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$ diperoleh $x = \frac{2-2z^3}{1+z^3}$,

$$dx = \frac{-12z^2}{(1+z^3)^2} dz, \text{ sehingga}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx &= - \int \frac{2(1+z^3)^2 \cdot z \cdot 12z^2}{16z^6(1+z^3)^2} dz \\ &= - \frac{3}{2} \int \frac{dz}{z^3} = \frac{3}{4z^2} + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx = \frac{3}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + c$$

Integral Memuat Akar Yang Tidak Senama

Contoh

Hitung $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$

Ada tiga bentuk akar yang muncul pada integran, yaitu $\sqrt[2]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$ dan $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Tiga bentuk akar itu kita sebut tidak senama sebab pangkat x penyebutnya tidak sama. Untuk menghilangkan bentuk akar, kita lakukan dengan menyamakan penyebutnya terlebih dahulu yaitu dengan melakukan substitusi $z = x^{\frac{1}{k}}$ dengan k adalah KPK dari penyebut-penyebut pangkat x . Perhatikan jawaban soal di atas berikut ini.

Jawab:

Dengan substitusi $z = \sqrt[6]{x}$ diperoleh $x = z^6$ dan $dx = 6z^5 dz$ sehingga

$$\begin{aligned}\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx &= \int \frac{z^6 + z^4 + z}{z^6(1 + z^2)} (6z^5) dz \\&= 6 \int \frac{z^{11} + z^9 + z^6}{z^8 + z^6} dz \\&= 6 \int \left(z^3 + \frac{z^6}{z^8 + z^6} \right) dz \\&= 6 \int \left(z^3 + \frac{1}{z^2 + 1} \right) dz \\&= \frac{3}{2} z^4 + 6 \arctan z + c \\&= \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 6 \arctan \sqrt[6]{x} + c\end{aligned}$$

Jawablah soal berikut ini!

Tentukan hasil integral tak tentu berikut ini!

1. $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$

Jawab:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$2. \int \frac{\sqrt[6]{2x-3}}{1+\sqrt[3]{2x-3}} dx$$

Jawab:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard, 1992. *Calculus with analytic geometri-4th ed.* John Wiley & Sons. New York
- Apostol, Tomm, 1966. *Calculus (Volume 1 second edition)*. John Wiley & Sons. New York
- J. Purcell Edwin (terjemahan I Nyoman Susila), 1991. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1*. Erlangga. Jakarta
- Martono Koko, 1992. *Kalkulus seri 8: Penggunaan Integral Tentu*. ITB. Bandung
- Thomas George B (terjemahan Pantur Silaban), 1986. *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Erlangga. Jakarta.
- R. Sulaiman, 2015, *Integral dan Aplikasinya*, Zifatama. Surabaya.